

Zur Berechnung von Massenwerten skalarer Mesonen in der nichtlinearen Spinortheorie

H. STUMPF und H. YAMAMOTO *

Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München

(Z. Naturforsch. 20 a, 1—12 [1965]; eingegangen am 24. August 1964)

In der nichtlinearen Spinortheorie mit HEISENBERGSCHER nichtkanonischer Quantisierung führt die zweite Näherung zur Berechnung von Mesonenmassen auf eine Integralgleichung für das Matrixelement $\langle 0 | T \psi_a(x) \psi_a^*(y) | a \rangle$ (§ 1). Die Gleichung wird im Schwerpunktssystem nach einer Spin-Isospin-Algebra ausreduziert (§ 2) und als Lösungsverfahren die FREDHOLM-Theorie spinorieller Integralgleichungen verwendet (§ 3). Zur Vereinfachung des Lösungsverfahrens wird der in der Integralgleichung auftretende Propagator mit Geistern endlicher Ruhemasse regularisiert (§ 4) und zur Klassifizierung der Lösungen eine gruppentheoretische Analyse der Wellenfunktionen vorgenommen (§ 5). Das Eigenwertproblem kann für die Spin-Null-Teilchen näherungsweise gelöst werden (§ 6) und ergibt die Massen für das π - und η -Meson in Abhängigkeit von der Geistermasse.

In der nichtlinearen Spinortheorie mit HEISENBERGSCHER nichtkanonischer Quantisierung wurden bisher Bosonenmassen nur in niedrigster TAMM-DANCOFF-Näherung berechnet¹. Diese besteht in einer einmaligen Iteration der zu den Bosonen gehörigen Zweipunktfunktionen mittels der Feldgleichung und nachfolgender Kontraktion, wobei alle höheren φ -Funktionen Null gesetzt werden. Die dabei entstehenden Gleichungen ergeben nach Abspaltung der Schwerpunktskoordinate ein Eigenwertproblem für J^2 , welches nur noch vom Wert der Wellenfunktion am Ursprung abhängt. Der Masseneigenwert ist in dieser Näherung daher von den inneren Koordinaten, d. h. von der Struktur der Teilchen unabhängig. Dies stellt eine sehr grobe Approximation dar, und gestattet deshalb auch nur die Massenberechnung von skalaren Mesonen, nicht aber von Vektormesonen. Um diesen unphysikalischen Zug zu beseitigen, d. h. um eine Strukturabhängigkeit der Massenwerte einzuführen, muß man die nächsthöhere Näherung untersuchen. Sie besteht in einer Zweifach-Iteration der betreffenden Matrixelemente mittels der Feldgleichung, nachfolgender Kontraktion und Nullsetzen aller höheren φ -Funktionen. Man erhält dann auf jeden Fall in den inneren Ko-

ordinaten nichtlokale Gleichungen für die Wellenfunktionen, die den engen Zusammenhang zwischen innerer Struktur und Teilchenmasse herstellen, und auch eine Berechnung von Vektormesonenmassen und -zuständen ermöglichen.

Die Ausführung der doppelten Iterationen ist jedoch nicht eindeutig festgelegt. Es gibt vielmehr verschiedene Iterationsmöglichkeiten, welche nach der Kontraktion auf verschiedene, nicht vollständig miteinander konsistente Integralgleichungen führen. Man kann aber durch die Graphen-Interpretation der Integralgleichungen aus physikalischen Gründen eine gewisse Auswahl treffen.

Hat man sich einmal auf bestimmte Graphen festgelegt, so verbleibt als wesentlichstes Problem die Integration der die „erlaubten“ Graphen beschreibenden Integralgleichung. Da die spinoriellen bzw. tensoriellen Kerne derartiger Integralgleichungen zu folge der nichtkanonischen Quantisierung zumindest nach einer endlichen Anzahl von Faltungen quadrat-integrierbar sind, so bietet sich die FREDHOLM-Theorie zur Lösung des Problems an². Diese Theorie wurde von MITTER und STUMPF³ vom skalaren Fall auf LORENTZ-kovariante tensorielle bzw. spinorielle Gleichungen verallgemeinert, und kann somit unmittel-

* On leave from Fukui University in Japan. — Der Aufenthalt von H. YAMAMOTO in München wurde durch die Alexander v. Humboldt-Stiftung ermöglicht.

¹ H. P. DÜRR, W. HEISENBERG, H. MITTER, S. SCHLIEDER u. K. YAMAZAKI, Z. Naturforsch. 14 a, 441 [1959].

² Diese Theorie ist das einzige Verfahren, welches beim Zweiteilchenproblem die simultane Berechnung von Streu- und Bindungszuständen ermöglicht, und damit für diesen Fall das HEISENBERGSche S-Matrix-Programm verwirklicht. Außerdem gestattet die FREDHOLM-Theorie für die Streuamplitude die Ableitung von Dispersionsrelationen und

verknüpft damit die feldtheoretisch approximierten Streuamplituden mit den phänomenologischen Ansätzen von MANDELSTAM u. a. Für den nichtrelativistischen Fall siehe dazu z. B. N. N. KHURI, Phys. Rev. 107, 1148 [1957]; R. BLANKENBECLER, M. L. GOLDBERGER, N. N. KHURI u. S. B. TREIMAN, Ann. Physics, New York 10, 62 [1960]. Für den relativistischen Fall z. B. B. W. LEE u. R. F. SAWYER, Phys. Rev. 127, 2266 [1962].

³ H. MITTER u. H. STUMPF, preprint, Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München 1963.



bar auf die Tamm–Dancoff-Gleichungen der nichtlinearen Spinortheorie angewandt werden. Im nachfolgenden wird zunächst der spezielle Fall der Berechnung von Masseneigenwerten für Spin-Null-Mesonen studiert. Mittels der Fredholm-Theorie ergibt sich dann unter Verwendung gruppentheoretischer Argumente jeweils eine algebraische Gleichung für die π - und η -Mesenzustände, die zur Berechnung von J^2 benutzt werden kann. Auf Grund der für die spinorielle Fredholm-Theorie erbrachten Konvergenzbeweise kann die Eigenwertgleichung näherungsweise ausgewertet werden. Sie enthält jedoch für einen mit Geistern der Ruhemasse Null regularisierten Propagator bereits in der ersten Näherung eine komplizierte Integralfaltung. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, benutzen wir zur ersten Orientierung eine Regularisierung mit Geistern, deren Ruhemasse ungleich Null ist⁴. Wir demonstrieren das Verfahren an einer einfachsten Graphenauswahl, nämlich einem Kontaktgraphen und einem nicht-

lokalen Graphen. Das Verfahren kann unschwer auf kompliziertere Graphenkombinationen ausgedehnt werden. In dieser Arbeit aber beschränken wir uns auf die Diskussion des einfachsten Falles. Ebenso bleibt die Diskussion der Vektormesonen einer weiteren Arbeit vorbehalten.

§ 1. Graphenauswahl

Als Ausgangspunkt der Rechnung verwenden wir die nichtlineare Spinorgleichung in der nichtverdoppelten Dürrschen Darstellung⁵. Der Feldoperator ist dann sowohl im Spin- als auch im Isospinraum ein Zweierspinor, d. h. also ein Spin-Isospinor zweiter Stufe mit insgesamt vier Operator-Komponenten. Setzen wir zur Abkürzung

$$\sigma'_{\mu\alpha\beta} \equiv \sigma_{\mu\alpha\beta_1} I_{\alpha_2\beta_2} \quad (1)$$

und $\psi_a(x) \equiv \psi_{\alpha_1\alpha_2}(x)$, wobei die zweiten Indizes die Isospinfreiheitsgrade kennzeichnen sollen, so lautet die Feldgleichung

$$\psi_a(x) = l^2 \int d^4x' [G(x-x')] \sigma'^{\mu} \cdot \sigma'_{\mu\gamma\delta} \psi_{\beta}(x') \psi_{\gamma}^{*}(x') \psi_{\delta}(x'), \quad (2)$$

wobei die GREEN-Funktion durch

$$G(x) \equiv -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{ipx} \frac{\bar{\sigma}'_n p^{\mu}}{p^2 - i\delta} \quad (3)$$

definiert ist. In bezug auf die Definition der Metrik usw. verweisen wir auf die Dürrsche Arbeit⁶. Da bei nichtkanonischer Quantisierung im Heisenberg-Sinne der Antikommutator am Lichtkegel faktisch als Null angesehen wird, ist die Verwendung der Integralgleichung (2) zur Ausführung von Iterationsprozessen an zeitgeordneten Matrixelementen der Anwendung der zu (2) gehörigen Differentialgleichung völlig äquivalent⁷. Die Integraldarstellung (2) der nichtlinearen Spinorgleichung ist für uns insofern zweckmäßig, als wir alle nachfolgenden Untersuchungen mit Hilfe der Integralgleichungstheorie ausführen werden.

Das Matrixelement zur Bestimmung der Mesenzustände muß eine Zweipunktfunktion sein, da nur mit ihr Spin Null- und 1-Zustände beschrieben werden können. Es lautet

$$\langle 0 | T \psi_a(x) \psi_{\alpha}^{*}(y) | a \rangle \equiv \tau_a(x | y), \quad (4)$$

⁴ Ein solches Verfahren wurde bereits auch bei der Berechnung von Nukleonzuständen angewandt. Siehe ARIF-UZ-ZAMAN, Z. Naturforsch. **16a**, 225 [1961].

⁵ H. P. DÜRR, Z. Naturforsch. **16a**, 327 [1961].

⁶ loc. cit. ⁵.

wobei ψ^{*} der zu ψ adjungierte Feldoperator ist. Den Zustandsindex a an der τ -Funktion lassen wir im weiteren der Einfachheit halber weg.

Iteriert man in (4) zunächst $\psi_a(x)$ mittels der Feldgleichung (2) und in der daraus resultierenden Gleichung sodann $\psi_{\gamma}^{*}(x')$ mittels der zu (2) adjungierten Feldgleichung, so entsteht unter sinngemäßer Verallgemeinerung der Definition der τ -Funktion für höhere Variablenzahlen die Beziehung

$$\tau(x | y) = l^4 \int d^4x' d^4x'' [G(x-x')] \sigma'^{\mu} \cdot \sigma'_{\mu\gamma\delta} \tau(x' | x''), \quad (5)$$

$$\cdot [\sigma'^{\nu} G(x' - x'')] \sigma'_{\nu\epsilon\tau} \tau(x' | x'') \cdot \sigma'_{\epsilon\delta\tau} \tau(x'' | y).$$

Nun wenden wir auf (5) die neue Tamm–Dancoff-Methode an. Wir setzen diese Methode als bekannt voraus und schildern nur kurz ihre Anwendung auf (5). Wir entwickeln zunächst die Sechspunkt- τ -Funktion der rechten Seite von (5) formal nach der WICK-Regel, indem wir mittels der Zweipunktfunktion $\langle 0 | T \psi(z) \psi^{*}(z') | 0 \rangle$ alle Vakuum-Zweierkontraktionen herausziehen. Bei einer im Heisenberg-Sinne selbstkonsistent nichtkanonisch quantisierten Theo-

⁷ Das gilt allerdings nur für Bindungsprobleme. Für Streu-Probleme muß man entweder mit der Differentialgleichung selbst rechnen, oder zu (2) ein inhomogenes Glied hinzufügen.

rie sollte die Zweipunktfunktion regularisiert sein. Eine strenge, aus selbstkonsistenter Rechnung stammende Kontraktionsfunktion ist gegenwärtig noch nicht bekannt. Im Rahmen der HEISENBERGSCHEN Theorie wird die Zweipunktfunktion in nullter Näherung durch

$$F(x) \equiv -\frac{i \zeta^4}{(2 \pi)^4} \int d^4 p e^{i p \cdot x} \frac{\sigma_\mu^\mu p^\mu}{(p^2 - i \delta)^2 (p^2 + \zeta^2 - i \delta)} \quad (6)$$

dargestellt, mit $x = z - z'$ und ζ als Nukleonenmasse. (6) hat am Lichtkegel nurmehr eine logarithmische Singularität, die δ -Funktion ist durch die Geisterbeimischungen beseitigt.

Die Wick-Entwicklung der Sechspunkt- τ -Funktion mit der Kontraktionsfunktion (6) kann allgemein als eine Transformation vom τ -Funktionensystem auf ein neues Funktionensystem, das φ -System, interpretiert werden. Setzt man nun im Sinne der TAMM-DANCOFF-Approximation in dieser Transformation alle höheren φ -Funktionen gleich Null und behält nur die niedrigste φ -Funktion

$$\tau(x|y) \equiv \varphi(x|y) \quad (7)$$

$$\varphi^{(0)}(x|y) = -l^4 \int d^4 x' d^4 x'' \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 9 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) G(x-x') \sigma^\mu F(x'-y) \text{Sp}[\sigma^\nu G(x''-x') \sigma_\mu F(x'-x'')] \text{Sp}[\sigma_\nu \varphi^{(0)}(x''|x'')] \right. \\ \left. + \left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 4 \end{smallmatrix} \right) G(x-x') \sigma^\mu F(x'-x'') \sigma^\nu F(x''-y) \text{Sp}[\sigma_\nu G(x''-x') \sigma_\mu \varphi^{(0)}(x'|x'')] \right\} \quad (9)$$

führt. Der Einfachheit halber wurden beide Gleichungen in einer zusammengefaßt, da sie sich nur in den Konstanten unterscheiden. In den Klammern sind die oberen Zahlen der zeitlichen Komponente, die unteren den räumlichen Komponenten zugeordnet. Da (9) nur noch die Spinfreiheitsgrade enthält, wurde die Indizierung gänzlich unterdrückt. Die Multiplikation ist dann in der angegebenen Reihenfolge auszuführen. Die Reduktion der zunächst auftretenden 8 Terme auf die in (9) angeschriebenen 2 Terme wird mittels der FIERZ-Relation vorgenommen.

In (9) sind die beiden Graphentypen sofort erkennbar: der mit $\varphi(x'|x'')$ verknüpfte Integralausdruck ist ein nichtlokaler Graph, der mit $\varphi(x''|x'')$ verknüpfte Integralausdruck der lokale Graph. Diese beiden Typen sind nötig, um neben Spin-Null-Teil-

⁸ Die Selbstenergiegraphen bewirken für weite räumliche Abstände von x und y einen Anzug der GREEN-Funktion von der Masse Null auf eine endliche Masse (die Nukleonenmasse). Der Übergang zu GREEN-Funktionen mit einer Masse ungleich Null bewirkt eine Konvergenzverbesserung der Integrale am Lichtkegel, kann jedoch bei formaler Be-

rei, so erhält man aus (5) eine Integralgleichung für $\varphi(x|y)$ mit 10 Termen. In der Grapheninterpretation dieser Terme sind zwei davon Selbstenergiegraphen für das Nukleon, die restlichen acht Terme dagegen zerfallen in zwei Typen, einen lokalen und einen nichtlokalen Graph. Die Selbstenergiegraphen unterdrücken wir im folgenden⁸. Dann verbleiben in der aus (5) resultierenden Integralgleichung nurmehr die Wechselwirkungsgraphen. Diese kann man auf zwei Terme reduzieren, wenn man $\varphi(x|y)$ sogleich auf einer Isospinalgebra aufspannt. Es muß eine Entwicklung der Art

$$\varphi(x|y) \equiv \tau_{\lambda \alpha_1 \alpha_2} \varphi^\lambda(x|y) \quad (8)$$

mit $\tau^0 \equiv I$ im Isospin-Raum gelten, da die τ -Matrizen eine Algebra bilden. Setzt man (8) in die Integralgleichung ein, so ergibt sich zufolge der einfachen Isospinkopplung in (2), daß eine Separation der „zeitlichen“ (Isospin Null) und der „räumlichen“ (Isospin 1) Komponenten von $\varphi^\lambda(x|y)$ eintritt, welche auf die Integralgleichungen

chen auch die Spin-1-Teilchen zu behandeln. Es wird sich in der nachfolgenden Untersuchung herausstellen, daß diese beiden Graphen auch noch eine besonders einfache Struktur besitzen. Wie schon in der Einleitung erwähnt, ist dies der Grund für die spezielle Wahl der Iteration (5). Selbstverständlich müssen später auch andere Iterationskombinationen untersucht werden. Zunächst aber begnügen wir uns mit diesem einfachsten Modell, das bereits alle für eine Bindung nötigen Elemente enthält.

§ 2. Ausreduktion des Eigenwertproblems

Die zur Ableitung des Eigenwertproblems an (9) vorzunehmenden Operationen sind rein algebraischer Natur, so daß wir, wie schon in § 1, alle Zwischenrechnungen unterdrücken können und nur die wesentlichen Formeln explizit anzugeben brauchen.

rücksichtigung in der Integralgleichung nur numerisch ausgewertet werden. Da wir alle folgenden Rechnungen mit geschlossen integrierbaren Integralausdrücken vornehmen wollen, unterdrücken wir zunächst die Selbstenergiegraphen.

Als ersten Schritt führen wir Schwerpunktskoordinaten durch den Ansatz

$$\varphi^{\lambda}_{\alpha\alpha}(x|y) = \varphi^{\lambda}_{\alpha\alpha}(z) e^{i\frac{1}{2}J(x+y)} \quad (10)$$

ein, wobei J der Schwerpunktsimpuls und $z = x - y$ die Relativkoordinate ist, d. h. also jene Koordinate, welche die innere Struktur des Teilchens beschreibt.

Sodann transformieren wir das System (9) in den Impulsraum durch

$$\varphi^{\lambda}_{\alpha\alpha}(z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{i p \cdot z} \varphi^{\lambda}_{\alpha\alpha}(p) \quad (11)$$

und verstehen unter $G(p)$ und $F(p)$ die FOURIER-Transformierten von (3) und (6). Aus dem so transformierten System (9) läßt sich die Schwerpunktsabhängigkeit abspalten, so daß allein je ein Gleichungssystem für $\varphi^0(p)$ und $\varphi^k(p)$ entsteht. Diese Gleichungssysteme sind bereits Eigenwertprobleme, da in ihnen der unbekannte Viererimpuls J vorkommt. Jedoch sind die so erzeugten Eigenwertprobleme von viel allgemeinerem Typus als die konventionell bekannten Säkularprobleme: In den Gleichungen tritt J nicht linear, sondern in einer komplizierten funktionalen Form auf. Auf die Eigenart derartiger verallgemeinerter Eigenwertprobleme ge-

hen wir in § 3 noch genauer ein. Bevor wir jedoch hier die FOURIER-transformierten Gleichungen anschreiben, soll noch ein weiterer Reduktionsschritt vorgenommen werden. Wir spannen auch im Raum der Spinfreiheitsgrade die Funktionen $\varphi^{\lambda}(p)$, $G(p)$ und $F(p)$ auf einer PAULI-Algebra auf. Dies ist immer möglich, da alle drei Funktionen zweistufige Spinoren sind. Wir setzen daher

$$\varphi^{\lambda}_{\alpha\alpha}(p) = \bar{\sigma}_{\alpha\alpha}^{\mu} \Phi^{\lambda}_{\mu}(p) \quad (12)$$

und

$$G(p) = -\bar{\sigma}_{\mu} p^{\mu} g(p), \quad F(p) = -i \bar{\sigma}_{\mu} p^{\mu} f(p), \quad (13)$$

wobei in $G(p)$ und $F(p)$ die Isospineinheit durch den Übergang zu (9) schon eliminiert ist. Das heißt, die Darstellung (13) bezieht sich allein auf den Spinraum. Nach (3) und (6) muß

$$g(p) \equiv 1/(p^2 - i\delta), \quad (14)$$

$$f(p) \equiv z^4 / [(p^2 - i\delta)^2 (p^2 + z^2 - i\delta)] \quad (15)$$

sein. Geht man mit (12) bis (15) in das FOURIER-transformierte Eigenwertproblem ein und rechnet mittels der σ -Algebra die σ -Produkte aus, so entsteht aus (9) und aus (10) schließlich

$$\Phi_{\beta}^{(0)}(p) = -\frac{l^4}{(2\pi)^8} R^{\alpha\mu} z_{\beta} (p + \frac{1}{2}J)_{\alpha} (p - \frac{1}{2}J)_{\beta} g(p + \frac{1}{2}J) f(p - \frac{1}{2}J) \cdot [(\frac{36}{4}) R^{\varrho\tau} \lambda_{\mu} M_{\varrho\lambda}(J) \int \Phi_{\tau}^{(0)}(q) d^4q + (\frac{48}{32}) \int M_{\varrho}^{\varrho}(p - q) \Phi_{\mu}^{(0)}(q) d^4q]. \quad (16)$$

Hierbei beziehen sich die oberen Zahlen in den Klamern auf die zeitliche Isospinkomponente von $\Phi_{\beta}(p)$, die unteren Zahlen auf die räumlichen Komponenten. Es wurden folgende Abkürzungen benutzt:

$$R^{\alpha\mu} z_{\beta} \equiv (-i \varepsilon^{\alpha\mu} z_{\beta} - g^{\alpha\mu} g^{\beta\mu} + g^{\alpha\beta} g^{\mu\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\beta\mu}) \quad (17)$$

$$\text{sowie } M_{\varrho\lambda}(q) \equiv \int \frac{z^4 (r - q/2)_{\varrho} (r + q/2)_{\lambda}}{[(r + q/2)^2 - i\delta][(r - q/2)^2 + z^2 - i\delta][(r - q/2)^2 - i\delta]^2} d^4r \equiv N_1 \frac{q_{\varrho}}{z} \frac{q_{\lambda}}{z} + N_2 g_{\varrho\lambda} \quad (18)$$

$$\text{mit } N_1 \equiv -\frac{\pi^2 i z^2}{6} \left[\left(1 - \frac{2}{x} \right) + x \ln |x| + \left(-x + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right) \ln |1 + x| \right] \quad (19)$$

$$\text{und } N_2 \equiv -\frac{\pi^2 i z^2}{12} \left[\left(1 + \frac{1}{x} \right) + (3 + x) \ln |x| - \frac{(1+x)^3}{x^2} \ln |1 + x| \right], \quad (20)$$

wobei $x \equiv q^2/z^2$ ist.

Mit (16) hat das Problem eine Form angenommen, in der es einer Behandlung mittels der Integralgleichungstheorie zugängig ist. Wir erläutern im nächsten Paragraphen daher zunächst das Lösungsverfahren.

§ 3. Das Lösungsverfahren

Unter Berücksichtigung der Formeln (14) bis (20) sind die Gln. (16) wohldefinierte Integral-

gleichungssysteme mit tensoriellen Kernen gegenüber LORENTZ-Transformationen. Bei der Bestimmung der Eigenwerte J^2 handelt es sich allerdings nicht um konventionelle Eigenwertprobleme, da J^2 , wie schon erwähnt, in einer viel komplizierteren Form in die Integralgleichung eingeht, als dies bei linearen Eigenwertproblemen der Fall ist. Um ein so verallgemeinertes Eigenwertproblem zu lösen, muß man sich der Methode der Kopplungskonstan-

ten bedienen⁹. Man betrachtet dazu zunächst das inhomogene tensorielle Integralgleichungssystem

$$\Phi_\mu(p) = \lambda \int K_\mu^0(p, q, J) \Phi_\varrho(q) d^4q + \chi_\mu(p), \quad (21)$$

das für $\lambda = 1$ und $\chi_\mu(p) \equiv 0$ in das homogene System (16) übergeht, wenn man den Kern $K_\mu^0(p, q, J)$ mit den in (16) auftretenden Kernen identifiziert. Nun untersucht man zunächst die Lösungsmöglichkeit von (21) bei fixiertem (aber willkürlichen) J^2 und variablem λ . Nach MITTER und STUMPF kann ein solches System mittels der FREDHOLM-Theorie gelöst werden, wenn die Bedingung

$$\int K_\mu^0(p, q, J) K_\mu^{0*}(p, q, J) d^4p d^4q < C \quad (22)$$

erfüllt ist, wobei C eine endliche Konstante sein soll.

Wir nehmen für das Folgende an, daß eine derartige tensorielle Quadratintegrabilität des Kerns für alle endlichen J vorliegt. Dann kann der Lösungsvektor von (21) durch

$$\Phi_\mu(p) = \int R_\mu^0(p, q, \lambda, J) \chi_\varrho(q) d^4q \quad (23)$$

dargestellt werden, wobei die Resolvente R durch den Ausdruck

$$R_\mu^0(p, q, \lambda, J) \equiv D_\mu^0(p, q, \lambda, J) [D(\lambda, J)]^{-1} \quad (24)$$

definiert ist. Die Funktionen $D_\mu^0(p, q, \lambda, J)$ und $D(\lambda, J)$ werden durch tensorielle FREDHOLMSche Reihen dargestellt, welche nach MITTER und STUMPF in der gesamten λ -Ebene absolut konvergent sind. Das heißt, bei der FREDHOLM-Darstellung (23) handelt es sich *nicht* um eine störungstheoretische Entwicklung. Vielmehr ist die FREDHOLM-Theorie eine Theorie der *starken* Kopplung, welche asymptotisch für kleine λ in die störungstheoretische Entwicklung (NEUMANNsche Reihe) übergeht. Aus dieser Theorie können simultan sowohl die inhomogenen Lösungen, d. h. Streuzustände und Kopplungskonstanten, als auch die homogenen Lösungen, d. h. Bindungszustände und Eigenwerte von (21) bestimmt werden. Wir interessieren uns hier für die Bindungszustände.

Ein Bindungszustand, und damit eine Lösung der zu (21) gehörigen homogenen Gleichung liegt vor, wenn für $\lambda = \lambda_a$

$$D(\lambda_a, J) = 0 \quad (25)$$

gilt, d. h. wenn die Resolvente (24) an der Stelle λ_a einen Pol hat. Zur Eigenwertbestimmung mittels der

Gl. (25) setzen wir für $D(\lambda, J)$ die für alle λ konvergente FREDHOLM-Entwicklung

$$D(\lambda, J) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n d_n(J^2) \quad (26)$$

ein. Zur expliziten Bestimmung der $d_n(J^2)$ vgl. Anm.³. Die Eigenwertbedingung (25) lautet dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n d_n(J^2) = 0 \quad (27)$$

und ist für alle Eigenwerte $\lambda = \lambda_a$ erfüllt.

Nunmehr erinnern wir uns, daß wir eigentlich die Eigenwerte von J^2 für die homogene Gl. (21) mit $\lambda = 1$ berechnen wollen. Dazu wälzen wir die Eigenwertbedingung (27) von λ auf J^2 über, indem wir in (27) $\lambda = 1$ setzen und den Parameter J^2 variieren. (27) geht dann in die Bedingung

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n(J^2) = 0 \quad (28)$$

über. Da die Bedingung (22) für sämtliche endlichen Werte von J^2 bzw. J erfüllt sein soll, ist (26) für alle endlichen Werte von J^2 bzw. J absolut und gleichmäßig konvergent; d. h. die Funktion $D(\lambda, J)$ stellt nicht nur in bezug auf λ , sondern auch in bezug auf J^2 eine ganze analytische Funktion dar. Daher ist auch $D(1, J)$ eine ganze analytische Funktion, und (28) ist für gewisse J^2 -Werte $J^2 = J_\beta^2$ ($\beta = 1, 2, \dots$) erfüllbar. Die Resolvente (24) hat dann genau an diesen Stellen einen Pol, und es ist nurmehr die zu (21) zugeordnete homogene Gleichung lösbar, was wir gerade erreichen wollten. Die Werte $J^2 = J_\beta^2$ ($\beta = 1, 2, \dots$) sind dann die Eigenwerte des verallgemeinerten Eigenwertproblems (21).

Existiert als Untergruppe der LORENTZ-Transformation eine Gruppe von Symmetriformationen, deren infinitesimale Operatoren O_s mit dem Kern der Integralgl. (21) vertauschbar sind, so ist mit $\Phi_\mu(x)$ auch $O_s \Phi_\mu(x)$ eine Lösung zum gleichen Eigenwert, wenn O_s ($s = 1, \dots, l$) der Satz der infinitesimalen Operatoren ist. Das heißt das Spektrum der Integralgl. (21) ist entartet. Jeder n -dimensionalen Darstellung der Untergruppe ist dann ein n -fach entarteter Eigenwert in λ und damit auch in J^2 zugeordnet. Methoden zur Behandlung von entarteten Eigenwertspektren wurden im Rahmen der skalaren FREDHOLM-Theorie bereits entwickelt¹⁰ und

⁹ Diese Methode wird bei der Umwandlung von SCHRÖDINGER-Problemen in Integralgleichungen benutzt. Man vergleiche z. B. für die nichtrelativistische Potentialstreuung N. N. KHURI, Phys. Rev. **107**, 1148 [1957].

¹⁰ Siehe z. B. J. HORN, Partielle Differentialgleichungen, de Gruyter & Co., Berlin-Leipzig 1929, S. 66.

lassen sich ohne weiteres auch auf tensorielle Gleichungen des Typus (21) anwenden. Die Anwendung dieser Methoden setzt jedoch voraus, daß man die Eigenwerte der Säkulargleichung (27) bzw. (28) exakt bestimmen kann. Eine Aussage über den Symmetriecharakter bei näherungsweiser Berechnung der Eigenwerte ist dagegen im allgemeinen direkt mit (21) nicht möglich. Man muß dazu vielmehr von vornherein eine Ausreduktion der Eigenfunktionen nach Symmetrieklassen vornehmen. Dies führt auf Integralgleichungssysteme, deren Kerne in bezug auf die Untergruppe ausreduziert sind. Man kann derartige ausreduzierte Systeme nach demselben Verfahren mittels der FREDHOLM-Theorie behandeln wie das tensorielle System (21). Da man für das System (16) das Säkularpolynom (28) nur näherungsweise lösen kann, muß diese Methode insbesondere bei den Vektormesonen angewendet werden. Für die skalaren Mesonen dagegen, die wir hier allein behandeln wollen, läßt sich ein einfacherer Weg angeben, bei welchem man auf die direkte Ausreduktion verzichten kann.

§ 4. Regularisierung mit Geistern endlicher Ruhemasse

Die Anwendung der im vorangehenden Paragraphen beschriebenen FREDHOLM-Theorie hat zur Voraussetzung, daß der Kern der vorgegebenen Integralgleichung die Ungleichung (22) erfüllt. Diese Forderung ist so weit gefaßt, daß ihr auch Kerne genügen können, welche am Ursprung bzw. im LORENTZ-Raum am Lichtkegel für die Relativkoordinate $|p - q|$ Singularitäten aufweisen. Der Grad der Singularität muß allerdings beschränkt sein. In einem Raum mit der Dimension n darf die Singularität den Grad $r^{-n/2}$ nicht übersteigen, wenn $r \equiv |p - q|$ bedeutet.

Bei hinreichendem Abfall für große r kann auch ein solch singulärer Kern der Ungleichung (22) ge-

¹¹ Das Problem wird in der klassischen Integralgleichungstheorie vor allem an den GREEN-Funktionen im Ortsraum studiert. Diese weisen im R_n am Ursprung eine Singularität vom Grad $-n/2$ auf.

¹² S. G. MIKHLIN, Integral Equations, Pergamon Press, London 1957.

¹³ Man muß dazu für die Gln.(16) nur einen Ansatz der Form

$$\Phi_\beta(p) = [g(p + \frac{1}{2}J) f(p - \frac{1}{2}J)]^{1/2} \tilde{\Phi}_\beta(p)$$

verwenden und auf die $\tilde{\Phi}_\beta(p)$ umschreiben. Der dabei entstehende Kern hat dann sowohl in den p - als auch in den q -Variablen einen Abfall von $[g f]^{1/2}$ und bei der Quadrie-

nügen. Allerdings kann man in diesem Fall dann nicht mehr direkt mit der Integralgl. (21) rechnen, sondern muß zu einer einfach oder mehrfach iterierten Gleichung übergehen. Es kann nämlich unter den erwähnten Einschränkungen für den Grad der Singularität bewiesen werden, daß die Kerne nach einfacher oder mehrfacher Faltung ihre Singularitäten verlieren¹¹. Für diese einfach oder mehrfach iterierten Integralgleichungen lassen sich dann die FREDHOLM-Reihen in der im vorangegangenen Paragraphen angegebenen Weise konstruieren, und es gilt der Satz, daß jeder einfache Eigenwert der iterierten Integralgleichung auch ein einfacher Eigenwert der ursprünglichen Gleichung ist¹². Betrachtet man die Bedingung (22) vom physikalischen Standpunkt, d. h. übersetzt man die nichtrelativistischen und relativistischen Zweiteilchengleichungen in Integralgleichungen, so zeigt sich, daß eine derartige Erweiterung der Theorie auf iterierte Integralgleichungen aus zwei Gründen notwendig wird: Rechnet man im Ortsraum, so werden die GREEN-Funktionen in $|x - y|$ singulär, rechnet man im Impulsraum, so kann das FOURIER-transformierte Potential in $|p - q|$ eine Singularität aufweisen. Der zweite Fall tritt ein, wenn das Potential im Ortsraum für x gegen Unendlich zu schwach gegen Null geht, z. B. beim COULOMB-Potential. Untersucht man unter diesem Gesichtspunkt speziell die Kerne der zur Lösung vorgelegten Integralgl. (16), so sieht man, daß diese am Lichtkegel eine logarithmische Singularität in $|p - q|$ aufweisen, wogegen sie für große p wie $p^{-10} \log |p - q|$ abfallen. Diese Eigenschaften reichen aus, um die Existenz der Ungleichung (22) sicherzustellen¹³. Sie zwingen einen jedoch zugleich, an Stelle der einfachen (21) zugeordneten homogenen Gleichung die iterierte homogene Gleichung

$$\Phi_\mu(p) = \lambda^2 \int K_\mu^0(p, r) K_\nu^r(r, q) \Phi_\nu(q) d^4r d^4q \quad (29)$$

zu verwenden, da nach einmaliger Iteration die schwache logarithmische Singularität verschwinden

rung nach (22) in jeder Variablen einzeln wie $[g f]$, was auf eine integrierbare Funktion führt. Untersucht man die zu diesem Kern gehörige FREDHOLM-Resolvente, so stellt man fest, daß durch die Transformation nur der Zähler, nicht aber der Nenner beeinflußt wird. Da der Nenner $D(\lambda, J)$ das Säkularproblem definiert, so bedeutet dies, daß die Eigenwerte gegenüber der angegebenen Transformation invariant sind, was natürlich zu erwarten ist. Solange man daher nur die Eigenwerte sucht, kann man direkt von der Gl. (16) ausgehen, ohne die angegebene Transformation tatsächlich auszuführen. Auf diesen Standpunkt stellen wir uns im folgenden.

muß. Beim Komplikationsgrad der in (16) auftretenden Kerne ist die exakte Faltung aber ein sehr schwieriges Problem, das wir zur ersten Orientierung umgehen wollen. Wir versuchen daher, an Stelle der logarithmisch singulären Kerne regularisierte Kerne einzuführen, die einen wohldefinierten Wert am Lichtkegel annehmen. Zu diesem Zweck müssen wir nur jenen Anteil von $K_\mu^0(p, q)$ untersuchen, der die Singularität enthält, und dies ist $M_\varrho^\lambda(p - q)$. Übersetzt man die Integralgl. (16) in den Ortsraum, so spielt die FOURIER-Transformierte von M_ϱ^λ die Rolle des Potentials, wogegen die restlichen Anteile in $K_\mu^0(p, q)$ mit dem kinematischen Verhalten der Teilchen zusammenhängen. Da das Verhalten für kleine Impulse die Asymptotik $x \rightarrow \infty$ im Ortsraum bestimmt, so folgt, daß zu folge der logarithmischen Singularität am Lichtkegel im Impulsraum ein schwacher Abfall des Potentials im Ortsraum vorliegt. Da die FOURIER-Transformierte von M_ϱ^λ gleich dem Produkt $G(x) F(x)$ ist, so erhält man einen Abfall wie $|x|^{-1}$. Dieser Abfall ist im wesentlichen durch die Geister-Regularisierung des Propagators bedingt. Nun ist die Regularisierung von $F(x)$ mit Geistern zur Ruhemasse Null nicht zwingend. Man kann auch Geister mit endlicher Masse verwenden. In diesem Fall erhält man ein YUKAWA-artiges Abklingen des Propagators, was sofort den Kern im Impulsraum am Lichtkegel regularisiert. Sofern die Regularisierungsmasse der Geister hinreichend klein ist, ändert sich nur das asymptotische Verhalten von $F(x)$, wogegen das Verhalten für alle endlichen x ungeändert

bleibt. In den Impulsraum übersetzt besagt dies: die Regularisierung beseitigt nur die Singularität am Lichtkegel, wogegen die Impulsraum-Asymptotik von M_ϱ^λ ungeändert bleibt. Da im Ortsraum ein hinreichend tief gelegener Bindungszustand nur vom Verhalten des Potentials bei kleinem bzw. endlichem x bestimmt wird, so folgt: Die Regularisierung mit Geistern von kleiner aber endlicher Masse ändert praktisch nichts am Bindungszustand.

Da bei einer derartigen Regularisierung mit Geistern endlicher Masse die in unsterer Näherung berechneten Eigenwerte jedoch noch etwas von dieser Masse abhängen, wird man zweckmäßig die Regularisierungsmasse dadurch bestimmen, daß man sie an einem phänomenologischen Wert eicht. Beim vorliegenden Problem können wir dazu eine der Mesonenmassen benutzen, d. h. wir können danach nurmehr Massenverhältnisse der Mesonen untereinander berechnen, aber keine Absolutbestimmung in bezug auf die Nukleonemasse vornehmen¹⁴. Bevor wir die Regularisierung durchführen, soll jedoch nochmals darauf hingewiesen werden, daß kein prinzipieller Zwang dazu vorliegt, sondern nur die Absicht, eine erste Orientierung möglichst einfach durchzuführen.

Setzt man für den Propagator in diesem Fall an Stelle von (13) die Relation

$$F(p, m) = -i \bar{\sigma}_\mu p^\mu f(p, m) \quad (30)$$

an, und regularisiert man mit einem Geist und einem Dipolgeist der Ruhemasse m , so erhält man

$$f(p, m) \equiv \frac{(\varphi^2 - m^2)^2}{(p^2 + m^2 - i\delta)^2 (p^2 + \varphi^2 - i\delta)} \cdot \quad (31)$$

Das Integral (18) geht dabei in den Integralausdruck

$$M_{\varrho\lambda}(q, m) \equiv \int \frac{(\varphi^2 - m^2)^2 (r - q/2)_\lambda (r + q/2)_\varrho}{[(r + q/2)^2 - i\delta][(r - q/2)^2 + \varphi^2 - i\delta][(r - q/2)^2 + m^2 - i\delta]} d^4r \equiv N_1 \frac{q_\varrho q_\lambda}{\varphi} + N_2 g_{\varrho\lambda} \quad (32)$$

über mit $N_1(q, m) \equiv \frac{i\pi^2}{6} \varphi^2 \left\{ \frac{1}{x^2} (1 - \vartheta) (2 - 4\vartheta - x) - \frac{1}{2x^3} (2 + 3x - x^3) \ln |1 + x| + \frac{1}{x^3} [2\vartheta^2(3 - 2\vartheta) + 3\vartheta(2 - \vartheta)x - x^3] \ln |\vartheta + x| - \frac{\vartheta}{x^3} [2\vartheta(3 - 2\vartheta) + 3(2 - \vartheta)x] \ln \vartheta \right\}$

und $N_2(q, m) \equiv \frac{i\pi^2}{12} \varphi^2 \left\{ -\frac{1}{x} (1 - \vartheta) (1 - 2\vartheta + x) + \frac{1}{x^2} (1 + x)^3 \ln |1 + x| - \frac{1}{x^2} [\vartheta^2(3 - 2\vartheta) + 3\vartheta(2 - \vartheta)x + 3x^2 + x^3] \ln |\vartheta + x| + \frac{1}{x^2} \vartheta [\vartheta(3 - 2\vartheta) + 3(2 - \vartheta)x] \ln \vartheta \right\}$

¹⁴ Bei den numerischen Rechnungen nehmen wir eine solche Anpassung nicht vor, sondern untersuchen direkt die Abhängigkeit der Eigenwerte von der Geistermasse.

wobei $x = q^2/\varkappa^2$ und $\vartheta = m^2/\varkappa^2$ gesetzt wurde. Die regularisierten Integralgleichungen (16) lauten dann

$$\begin{aligned} \Phi_{\beta}^{(0)}(p) = & -\frac{l^4}{(2\pi)^8} R^{\alpha\mu\nu\beta}(p + \frac{1}{2}J)_\alpha(p - \frac{1}{2}J)_\nu g(p + \frac{1}{2}J) f(p - \frac{1}{2}J, m) \\ & \cdot [(\frac{36}{4}) R^{\rho\tau\lambda\mu} M_{\rho\lambda}(J, m) \int \Phi_{\tau}^{(0)}(q) d^4q + (\frac{48}{32}) \int M_{\rho}^0(p - q, m) \Phi_{\mu}^{(0)}(q) d^4q]. \end{aligned} \quad (35)$$

Wir legen diese Gleichungen unseren weiteren Rechnungen zugrunde. Der Bereich, in dem die Geistermasse m variiert werden darf, wird durch die Nukleonenrechnung eingeschränkt, da zu jedem m ein zugehöriges $l \neq 0$ existieren muß. Wir diskutieren dies ausführlich in § 7.

§ 5. Symmetrieforderungen

Zur Untersuchung der in (35) auftretenden Mesoneneigenzustände ist es nötig, die zugehörigen Mesonenwellenfunktionen in ihren Symmetrieeigenschaften zu charakterisieren. Wir gehen dazu von der Feldgleichung (2) aus. Diese ist invariant gegenüber der inhomogenen LORENTZ-Gruppe, den Rotationen im Isospinraum und der PG -Transformation¹⁵. Wendet man die Gl. (2) bei Iterationen an, so folgt wegen der ebenfalls bestehenden Invarianz der F - und G -Funktion gegenüber den angegebenen Transformationen, daß die kontrahierten Gleichungen dieselben Invarianzen besitzen müssen. Insbesondere müssen also die Kerne von (9) die gleichen Invarianzen wie (2) aufweisen. Bei Einführung von Schwerpunktskoordinaten nach (11) fällt für die Relativkoordinate $z = x - y$ die Translationsgruppe weg, und die Kerne der Integralgleichungen in z sind Invarianten gegenüber der homogenen LORENTZ-Gruppe, der Isospin-Rotationsgruppe und der PG -Transformation. Beim Übergang in den Impulsraum ändert sich an diesen Invarianzen natürlich nichts. Da eine jede Invarianz des Kerns einer Integralgleichung die Vertauschbarkeit der infinitesimalen Operatoren der zugehörigen Gruppe mit dem Kern einschließt, so folgt daraus, daß mit einer Wellenfunktion $\Phi_{\mu}(p)$ auch die transformierte Wellenfunktion $\Phi'_{\mu}(p)$ eine Lösung der ursprünglichen Gleichung sein muß, was zur Definition zusätzlicher Quantenzahlen führt. Im vorliegenden Fall kann der Spin, der Isospin und die PG -Parität dadurch definiert werden. Zur Definition und Untersuchung der diese Größen charakterisierenden Quantenzahlen beschränkt man sich zweckmäßigerweise auf das Ruhesystem, d. h. man setzt vom Gesamtimpuls die

räumlichen Komponenten Null, und nimmt nur $J_0 \neq 0$ an. In diesem speziellen System verbleiben als Invarianzgruppen nur noch die dreidimensionalen Rotationen, die Isospin-Rotationen und die PG -Transformation. Die räumlichen Rotationen werden im Impulsraum durch drei infinitesimale Operatoren

$$\mathfrak{J}_1(p), \quad \mathfrak{J}_2(p), \quad \mathfrak{J}_3(p) \quad (36)$$

charakterisiert, die Isospin-Rotationen besitzen ebenfalls in Analogie zu den räumlichen Rotationen drei infinitesimale Operatoren

$$I_1, \quad I_2, \quad I_3 \quad (37)$$

und die PG -Transformation ist durch

$$\psi'_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = (\tau_2 \sigma_2)_{\alpha\beta} \psi_{\beta}^*(-\mathbf{r}, t) \quad (38)$$

im Feldoperator charakterisiert. Da die Operatoren (36) untereinander nicht vertauschbar sind und die Operatoren (37) analoge Eigenschaften aufweisen, so kann man zur Definition von Quantenzahlen nur den simultan diagonalisierbaren Satz von Operatoren

$$H \equiv J_0, \quad \mathfrak{J}^2, \quad \mathfrak{J}_3, \quad I^2, \quad I_3, \quad PG \quad (39)$$

verwenden, wobei \mathfrak{J}^2 das Skalarprodukt der Operatoren (36) usw. bedeutet. Die Wellenfunktionen φ aus (8) sollen nun im Ruhesystem nach diesen Quantenzahlen ausreduziert werden. Eine Ausreduktion der Wellenfunktionen φ nach Quantenzahlen von (39) ist gleichbedeutend mit der Konstruktion irreduzibler Darstellungen zu den Drehgruppen (36), (37) und zur diskreten Gruppe (38). Hat man irreduzible Darstellungen, so sind die in (39) auftretenden Operatoren automatisch diagonalisiert bzw. können sofort diagonalisiert werden. Für den vorliegenden Fall verschaffen wir uns diese Darstellungen nicht durch CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten, was viel zu kompliziert wäre, sondern über Invarianzbetrachtungen.

Wir denken uns dazu ganz allgemein ein rotationsinvariantes dynamisches Problem, das durch Spinoren oder Tensoren n -ter Stufe beschrieben werden möge. Zu einem bestimmten Energieeigenwert im Ruhesystem J_0^2 existiere ein Satz von Wellenfunktionen $\Psi_{\nu_1 \dots \nu_n}^f(x_1 \dots x_k)$ als Lösung des Problems,

¹⁵ Zur PG -Invarianz siehe die Diskussion in § 5.

wobei $\nu_1 \dots \nu_n$ die spinoriellen bzw. tensoriellen Indizes bedeuten mögen, $x_1 \dots x_k$ die Raumkoordinaten symbolisieren und der Index f von $f = 1, \dots, m$ läuft, wenn m energetisch entartete Wellenfunktionen vorhanden sind. Bei einer infinitesimalen Rotation um die Achse $\mathbf{n} \equiv (n_1 n_2 n_3)$ transformiert sich dann jede Wellenfunktion durch

$$\begin{aligned} \Psi_{\nu_1 \dots \nu_n}^{f'}(x_1' \dots x_k') & \quad (40) \\ & = [1 + n_k J_{\nu_1 \dots \nu_n}^{k \nu_1 \dots \nu_n}(x_1 \dots x_k)] \Psi_{\nu_1 \dots \nu_n}^f(x_1 \dots x_k). \end{aligned}$$

Eine solche Transformation einer Wellenfunktion von einem Bezugssystem in ein anderes Bezugssystem hat zunächst mit einer Darstellung der Rotationsgruppe noch nichts zu tun. Eine solche Darstellung liegt vielmehr erst dann vor, wenn zusätzlich zum Transformationsverhalten (40) Relationen der Art

$$\Psi_{\nu_1 \dots \nu_n}^{f'}(x_1 \dots x_k) = \sum_{g=1}^m D_g^f(\mathbf{n}) \Psi_{\nu_1 \dots \nu_n}^g(x_1 \dots x_k) \quad (41)$$

gelten, wobei $D_g^f(\mathbf{n})$ eine m -dimensionale Darstellungsmatrix zur Drehung um \mathbf{n} ist. Läßt sich (41) für beliebige Drehungen verifizieren, so ist dies gleichbedeutend mit der Aussage: Der Satz

$$\Psi_{\nu_1 \dots \nu_n}^f(x_1 \dots x_k) \quad (f = 1, \dots, m)$$

bildet die Basis einer m -dimensionalen Darstellung der Drehgruppe. Wie man sieht, hängt die Definition einer Basis für eine Darstellung und deren Dimension nicht unmittelbar mit dem Tensorgrad bzw. Spinorgrad der Wellenfunktionen zusammen¹⁶. Diese Bemerkungen wenden wir auf unsere vorliegenden Wellenfunktionen an. Da sich der Isospin zufolge (8) völlig abspalten läßt, betrachten wir zuerst die Drehimpulsdarstellungen. Im Ruhssystem sind dies die Funktionen (12). Der Gesamtdrehimpuls Null, d. h. $\mathfrak{J}^2 = 0$, ist mit einer eindimensionalen Darstellung gekoppelt. Es gibt dafür also nur eine Funktion $\varphi_{\alpha\alpha}^\lambda(p)$. Die Darstellungsmatrix $D_g^f(\mathbf{n})$ wird identisch 1.

Die Relation (41) als Bedingung für eine Darstellung geht in diesem Fall in

$$\varphi_{\alpha\alpha}'(p) = \varphi_{\alpha\alpha}^\lambda(p) \quad (42)$$

über, wobei $\varphi_{\alpha\alpha}'$ die transformierte Wellenfunktion ist, in der p' durch p ersetzt wurde. (42) verlangt

¹⁶ Zum Beispiel kann sich ein mehrstufiger Spinor oder Tensor sehr wohl nur als eine eindimensionale Darstellung der Gruppe, d. h. als Skalar, transformieren. Der Grund für diese Möglichkeit beruht auf der Tatsache, daß die reine Tensor- bzw. Spinortransformation in (44) im allgemeinen

eine forminvariante Funktion $\varphi_{\alpha\alpha}^\lambda(p)$. Berücksichtigt man, daß φ nach (12) auf einer PAULI-Algebra aufgespannt wird und daß $\Phi_\mu(p)$ nur aus den Vektoren p_μ und J_μ aufgebaut sein kann, weil andere Größen aus physikalischen Gründen nicht auftreten können, so sieht man sofort, daß die eindimensionalen Darstellungen nur durch

$$\varphi_{\alpha\beta}^\lambda(p) = \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^\mu [J_\mu f_1^\lambda(p^2, p J) + p_\mu f_2^\lambda(p^2, p J)] \quad (43)$$

charakterisiert werden können. f_1 und f_2 sind dabei noch willkürliche Funktionen der Invarianten p^2 und $p J$.

Ähnliche Argumente kann man zur Konstruktion von Darstellungen für den Gesamtdrehimpulsbetrag 1 benutzen. Mit ihm sind dreidimensionale Darstellungen gekoppelt. Als Basis für derartige Darstellungen müssen drei Wellenfunktionen $\varphi_{\alpha\beta}^{\lambda f}(p)$ mit $f = 1, 2, 3$ vorhanden sein, welche sich nach (41) wie

$$\varphi_{\alpha\beta}^{\lambda f'}(p) = \sum_{g=1}^3 D_g^f(\mathbf{n}) \varphi_{\alpha\beta}^{\lambda g}(p) \quad (44)$$

transformieren lassen müssen, d. h. sich bei Rotationen wie ein räumlicher Dreivektor transformieren. Offensichtlich ist dann der Ausdruck

$$\chi_{\alpha\beta}^\lambda(p) = \sum_{k=1}^3 P_k \varphi_{\alpha\beta}^{\lambda k}(p) \quad (45)$$

eine Invariante, wenn man unter P_k einen willkürlichen, aber konstanten räumlichen Vektor versteht. Da die $\varphi_{\alpha\beta}^{\lambda k}(p)$ zum gleichen Energieniveau gehören sollen, muß auch (45) eine Lösung zum betreffenden Eigenwert sein. Man erkennt auch leicht, daß die Linearkombination (45) \mathfrak{J}^2 diagonalisiert. \mathfrak{J}_3 dagegen bleibt unbestimmt. Dies hat aber keine Bedeutung, da nur der Gesamtbetrag des Drehimpulses, nicht aber seine Projektion auf eine bestimmte Richtung für den vorliegenden Fall wesentlich ist. Die Verwendung der Linearkombination (45) zur Darstellung eines Gesamtdrehimpulsbetrages 1 ist demnach zulässig. Beachtet man, daß im Ruhssystem $J P = 0$ ist, so erhält man für $\chi_{\alpha\beta}^\lambda(p)$ sofort die Darstellung

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha\beta}^\lambda(p) = \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^\mu & [P_\mu h_1^\lambda(p^2, p J) + p_\mu (P p) h_2^\lambda(p^2, p J) \\ & + J_\mu (P p) h_3^\lambda(p^2, p J) + \epsilon_{\mu\lambda\nu\rho} p^\lambda J^\nu P^\rho h_4^\lambda] \quad (46) \end{aligned}$$

zu keiner irreduziblen Darstellung gehört, so daß ein Tensor bzw. Spinor n -ter Stufe in mehrere irreduzible Darstellungen zerspalten werden kann, wie dies aus der Gruppentheorie allgemein bekannt ist.

unter Verwendung analoger Invarianzargumente wie bei (47). h_1 bis h_4 sind noch willkürliche Funktionen der Invarianten p^2 und $p|J$. Diese Funktionen werden erst durch die Dynamik festgelegt. Mit (43) und (46) hat man die maximal mögliche Information für den Drehimpuls erreicht.

Die Isospin-Darstellungen werden durch die Kombination

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha\alpha}^{\lambda}(p) &\equiv \bar{\sigma}_{\alpha\alpha}^{\mu} \Phi_{\mu 0}^{\lambda}(p) \equiv \bar{\sigma}_{\alpha\alpha}^{\mu} Q^{\lambda} \Phi_{\mu 0}(p), \\ \chi_{\alpha\alpha}^{\lambda}(p) &\equiv \bar{\sigma}_{\alpha\alpha}^{\mu} \Phi_{\mu 1}^{\lambda}(p) \equiv \bar{\sigma}_{\alpha\alpha}^{\mu} Q^{\lambda} \Phi_{\mu 1}(p) \end{aligned} \quad (47)$$

erreicht, wobei für Vierervektoren Q^{λ} mit rein räumlichen Komponenten, d. h. $Q^0 \equiv 0$, Isospin-1-Darstellungen entstehen, für rein zeitliche Q^{λ} , d. h. $Q^k \equiv 0$, (räumlich) dagegen Isospin-Null-Darstellungen. Die Ansätze (47) sind mit den Integralgleichungen (16) verträglich.

Die PG -Transformation bringt eine weitere Einschränkung. Zufolge der PG -Invarianz von (2) muß

$$(PG)|a\rangle = p_a|a\rangle \quad (48)$$

gelten, wobei p_a der Eigenwert von $|a\rangle$ ist. Daraus folgt für das Matrixelement die Relation

$$\begin{aligned} \langle 0|T\psi(x)\psi^*(y)|a\rangle &\quad (49) \\ = p_a \langle 0|T(PG)\psi(x)(PG)^{-1}(PG)\psi^*(y)(PG)^{-1}|a\rangle, \end{aligned}$$

woraus unter Einführung von Schwerpunktskoordinaten und Aufspannen auf die Spin-Isospin-Algebra im Impulsraum die Bedingung

$$\bar{\sigma}^{\mu} \tau_{\lambda} \Phi_{\mu}^{\lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = -p_a \sigma^{\mu} \tau_{\lambda} \Phi_{\mu}^{\lambda}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}_0) \quad (50)$$

wird. Wegen des verschiedenartigen Verhaltens von räumlichen und zeitlichen Komponenten ist sie nur im Ruhsystem erfüllbar. Zerlegt man sodann $\Phi_{\mu}^{\lambda}(p)$ in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil in bezug auf eine Totalspiegelung, d. h. setzt man

$$\Phi_{\mu}^{\lambda}(p) = \frac{1}{2} [S_{\mu}^{\lambda}(p) + A_{\mu}^{\lambda}(p)] \quad (51)$$

mit $A_{\mu}^{\lambda}(p) \equiv \Phi_{\mu}^{\lambda}(p) - \Phi_{\mu}^{\lambda}(-p)$ (52)

und $S_{\mu}^{\lambda}(p) \equiv \Phi_{\mu}^{\lambda}(p) + \Phi_{\mu}^{\lambda}(-p)$, (53)

so kann (50) als eine zusätzliche Bedingung für (43) und (46) formuliert werden. Indem man

$A_{\mu}^{\lambda}(p)$ und $S_{\mu}^{\lambda}(p)$ entsprechend (43) und (46) für die Spin-Null- und Spin-1-Darstellung aus Invarianten aufbaut, erhält man für das Quantenzahlenschema ($|J|/\alpha_N$ empirische Werte)

| | $ J $ | $ I $ | p_a | $ J /\alpha_N$ |
|-----------|-------|-------|-------|----------------|
| η | 0 | 0 | -1 | 0,584 |
| π | 0 | 1 | 1 | 0,147 |
| ω | 1 | 0 | 1 | 0,82 |
| ϱ | 1 | 1 | -1 | 0,78 |

(54)

die einschränkenden Bedingungen

$$A_{\mu\pi}^{\lambda} \equiv A_{\mu\eta}^{\lambda} \equiv 0, \quad (55)$$

wogegen die antisymmetrischen Anteile der Vektormesonen $\neq 0$ sind. Diese Unterscheidung zwischen skalaren Mesonen und Vektormesonen werden wir im folgenden bei der Ableitung der Eigenwertbedingung benutzen.

§ 6. Eigenwertgleichungen und Eigenwerte

Die Eigenwertgleichung des Systems (35) wird durch die Formel (28) geliefert. Eine exakte Auswertung dieser unendlichen Reihe ist unmöglich. Man muß daher sukzessiv die unendliche Reihe durch endlich viele Glieder approximieren. Wie jedoch bereits am Schluß des § 3 erwähnt wurde, erzwingt eine derartige näherungsweise Auswertung von (28) eine Ausreduktion der Lösungen nach Symmetrieklassen, da es außer den Symmetrieklassen der Wellenfunktionen keine Mittel gibt, bei näherungsweiser Berechnung der Eigenwerte ihre gruppentheoretische Ordnung anzugeben. Im vorangegangenen Paragraphen wurden die Hilfsmittel für eine solche Ausreduktion diskutiert. Als ersten Schritt zerlegen wir nach § 5 die Gln. (35) in die in (52) und (53) definierten symmetrischen und antisymmetrischen Anteile, indem wir für $\Phi_{\mu}^{\lambda}(p)$ die total in p und q gespiegelte Gleichung bilden und durch Addition bzw. Subtraktion von (35) Gleichungen für S_{μ}^{λ} und A_{μ}^{λ} erhalten. Diese haben die Gestalt

$$\begin{aligned} S_{\beta}^{(k)}(p) &= -\frac{l^4}{(2\pi)^8} U^{\alpha\mu\lambda\beta}(p + \frac{1}{2}J)_{\alpha}(p - \frac{1}{2}J)_{\lambda} g(p + \frac{1}{2}J) f(p - \frac{1}{2}J, m) \\ &\quad \cdot [\begin{pmatrix} 36 \\ 4 \end{pmatrix} U^{\alpha\tau\lambda\mu} M_{\alpha\lambda}(J, m) \int S_{\tau}^{(k)}(q) d^4q + \begin{pmatrix} 48 \\ 32 \end{pmatrix} \int M_{\alpha}^{\alpha}(p - q, m) S_{\mu}^{(k)}(q) d^4q] \quad (56) \\ &\quad - \frac{l^4}{(2\pi)^8} (-i) \varepsilon^{\alpha\mu\lambda\beta} (p + \frac{1}{2}J)_{\alpha}(p - \frac{1}{2}J)_{\lambda} g(p + \frac{1}{2}J) f(p - \frac{1}{2}J, m) \int M_{\alpha}^{\alpha}(p - q, m) A^{(k)}(q) d^4q \begin{pmatrix} 48 \\ 32 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{\beta}^{(0)}(p) = & -\frac{l^4}{(2\pi)^8} (-i) \epsilon^{\alpha\mu\lambda\beta} (p + \frac{1}{2}J)_\alpha (p - \frac{1}{2}J)_\lambda g(p + \frac{1}{2}J) f(p - \frac{1}{2}J, m) \\
& \cdot [(\frac{36}{4}) U^{\varrho\tau\lambda\mu} M_{\varrho\lambda}(J, m) \int S_{\tau}^{(0)}(q) d^4q + (\frac{48}{32}) \int M_{\varrho}^0(p - q, m) S_{\varrho}^{(0)}(q) d^4q] \quad (57) \\
& - \frac{l^4}{(2\pi)^8} U^{\alpha\mu\lambda\beta} (p + \frac{1}{2}J)_\alpha (p - \frac{1}{2}J)_\lambda g(p + \frac{1}{2}J) f(p - \frac{1}{2}J, m) (\frac{48}{32}) \int M_{\varrho}^0(p - q, m) A_{\mu}^{(0)}(q) d^4q,
\end{aligned}$$

wobei $U^{\alpha\mu\lambda\beta}$ durch

$$U^{\alpha\mu\lambda\beta} = R^{\alpha\mu\lambda\beta} + i \epsilon^{\alpha\mu\lambda\beta} \quad (58)$$

definiert ist. Zufolge der Isospin-Darstellung (47) kann man die „räumlichen“ Isospin-Komponenten S_{μ}^k und A_{μ}^k direkt mit Isospin-1-Darstellungen, die „zeitlichen“ Isospin-Komponenten S_{μ}^0 und A_{μ}^0 direkt mit Isospin-Null-Darstellungen identifizieren.

Im allgemeinen Fall müßten nun die Gln. (56) und (57) direkt auf die relativistischen Gesamtdrehimpuls-Darstellungen ausreduziert werden, welche für Spin-Null- und für Spin-1-Teilchen explizit in § 5 angegeben wurden. Dies führt auf Integraltypen, die z. Zt. noch nicht ausgewertet werden können. Wir zeigen nun aber, daß die Spin-Null-Darstellungen hierbei eine Ausnahme bilden, die eine direkte Auswertung der tensoriellen Gln. (56) und (57) zuläßt. Dazu bemerken wir, daß nach (55) für die Spin-Null-Teilchen der antisymmetrische Anteil identisch Null sein muß. Setzt man in (57) aber $A_{\mu} \equiv 0$, so folgt, daß zur Erfüllung der Gl. (57) der Kopplungsterm in S_{μ} ebenfalls identisch verschwinden muß, obwohl $S_{\mu} \neq 0$ ist. Durch Vergleich mit den Wellenfunktionen (43) und (46) ergibt sich sofort, daß zufolge der speziellen funktionalen Form dieser Kopplungsterm nur für Spin-Null-Teilchen verschwindet. Die Lösung $A_{\mu} \equiv 0$ liefert daher automatisch nur die Spin-Null-Teilchen. Die Integralgln. (56) und (57) reduzieren sich deshalb für das π - und das η -Meson auf

$$\begin{aligned}
S_{\beta}^{(\pi)}(p) = & -\frac{l^4}{(2\pi)^8} U^{\alpha\mu\lambda\beta} (p + \frac{1}{2}J)_\alpha (p - \frac{1}{2}J)_\lambda g(p + \frac{1}{2}J) f(p - \frac{1}{2}J, m) \\
& \cdot [(\frac{36}{4}) U^{\varrho\tau\lambda\mu} M_{\varrho\lambda}(J, m) \int S_{\tau}^{(\pi)}(q) d^4q + (\frac{48}{32}) \int M_{\varrho}^0(p - q, m) S_{\mu}^{(\pi)}(q) d^4q]. \quad (59)
\end{aligned}$$

Für diese Gleichungen kann man nun die Formel (28) näherungsweise auswerten. In erster Näherung kann man z. B. die Nullstellen der Gleichung

$$d_0(J^2) + d_1(J^2) = 0 \quad (60)$$

aufsuchen, und alle weiteren $d_m(J^2)$ wegen der absoluten Konvergenz von (28) für alle J^2 als ≈ 0 betrachten. Unter Berücksichtigung der Darstellung der $d_m(J^2)$ nach der FREDHOLM-Theorie führt dies auf die Gleichung

$$1 - \int K_{\mu}^{\alpha}(p, p, J) d^4p = 0, \quad (61)$$

was speziell für (59) die Bedingungen

$$\begin{aligned}
1 + & \frac{l^4}{(2\pi)^8} U^{\alpha\mu\lambda\beta} M_{\alpha\lambda}(J, m) \quad (62) \\
& \cdot [(\frac{36}{4}) U^{\varrho\beta\lambda\mu} M_{\varrho\lambda}(J, m) + (\frac{48}{32}) M_{\varrho}^0(0, m) g_{\mu}^{\beta}] = 0
\end{aligned}$$

ergibt. Obere Zahlen in den Klammern gelten für das η -Meson, untere Zahlen für das π -Meson. Die darin auftretenden Funktionen sind nach (32) explizit bekannt. (61) läßt sich daher direkt auswerten.

Die Lösungen der Säkulargleichungen (62) sind in den folgenden Abbildungen eingetragen. Als Parameter benutzen wir dabei die Regularisierungs-

masse m der Geister. Aus der Nukleonenrechnung folgt, daß nicht beliebig große m -Werte zugelassen sind. Vielmehr hat die Nukleoneneigenwertgleichung nur im Intervall $0 < m/\varkappa_N < 0,22$ reelle Lösungen, so daß wegen der Abhängigkeit der Eigenwertgleichungen (62) von m/\varkappa_N auch die Mesonenrechnungen auf dieses Intervall beschränkt werden müssen. Aus anderen Überlegungen läßt sich vermuten, daß die Regularisierungsmasse m der Elektronenmasse oder der μ -Mesonenmasse oder einem Mittelwert von beiden gleichgesetzt werden sollte. Es würde also genügen, ein m/\varkappa_N der Größenordnung 10^{-3} bis 10^{-1} zu verwenden. Wir untersuchen hier die Eigenwerte im Intervall $10^{-2} \leq m/\varkappa_N \leq 10^{-1}$, um eine zu starke Annäherung an die divergenten Integrale für $m = 0$ zu vermeiden. Wie man aus den Abbildungen erkennt, erhält man in der Umgebung von $m/\varkappa_N = 2 \cdot 10^{-2}$ eine besonders gute Anpassung an die experimentellen Werte. Zum Vergleich tragen wir in den Abbildungen 1 bis 3 die exakt berechneten Mesonenmassen der niedrigsten Näherung auf⁵. Da, wie man sieht, in der niedrigsten Näherung die Eigenwerte mit steigenden m/\varkappa_N ebenfalls ansteigen, so ergibt sich, daß, abgesehen vom Problem der

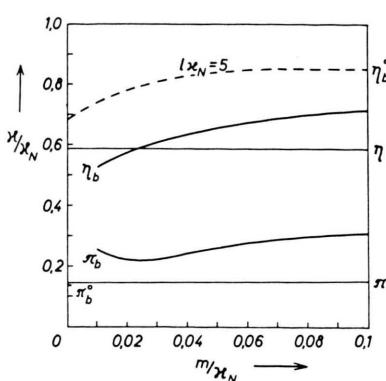


Abb. 1.

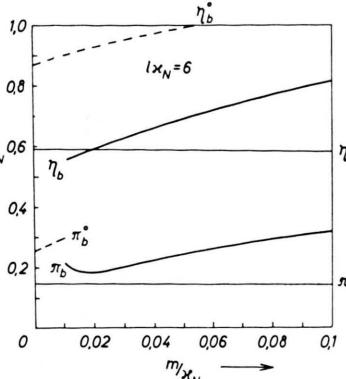


Abb. 2.

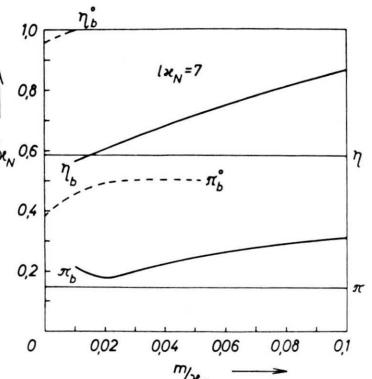


Abb. 3.

Abb. 1 bis 3. Als Abszisse ist das Verhältnis der Geistermasse m zur Nukleonenmasse z_N aufgetragen, als Ordinate das Verhältnis der Mesonmasse x zur Nukleonenmasse z_N . Die geraden Linien sind die zum Vergleich aufgetragenen experimentellen Werte, die mit η_b und π_b bezeichneten Linien die berechneten Werte für die Massenverhältnisse des η -Mesons und des π -Mesons zum Nukleon als Funktion von m/z_N . Der Wert von $l z_N$ stammt aus der Nukleonenrechnung und sollte eigentlich in Abhängigkeit von m/z_N variieren. Der Einfachheit halber wurden aber nur die drei Parameterwerte $l z_N = 5, 6, 7$ ausgewählt, die das Variationsintervall von $\ln z_N$ im betrachteten m/z_N -Intervall abgrenzen. Zum Vergleich sind die mit η_b^0 und π_b^0 bezeichneten exakten Eigenwerte der niedrigsten Näherung eingetragen. Die Rechnung läßt sich nicht für beliebige Geistermassen m durchführen, sondern bricht in Abhängigkeit von $l z_N$ bei endlichem m ab, wie die Linien zeigen.

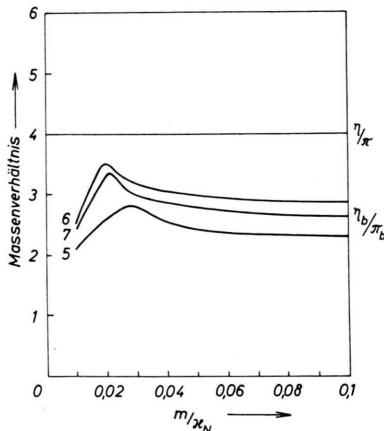


Abb. 4. Das Massenverhältnis des η -Mesons zum π -Meson in Abhängigkeit von m/z_N . Die gerade Linie gibt den experimentellen Wert.

Approximationsgüte, die zweite Näherung eine Verbesserung der Masseneigenwerte bewirkt. Diese Verbesserung ist eine Folge der Mitberücksichtigung des nichtlokalen Graphen. Stellt man nämlich die Integralgleichung der niedrigsten Näherung durch einmalige Iteration von x in $\tau(x|y)$ und nachfolgende Kontraktion auf, so entsteht aus ihr der

Kontaktgraph in (9), wenn man von $\varphi = K\varphi$ zu $\varphi = K^2\varphi$ übergeht. Die Gl. (9) ist daher mit der Eigenwertgleichung der niedrigsten Näherung identisch, wenn man den nichtlokalen Graphen wegläßt. In diesem Sinne bildet daher der nichtlokale Graph eine Korrektur der ersten Näherung, und man sieht, daß in der zweiten Näherung diese Korrektur zu einer physikalisch sinnvollen Abänderung der Eigenwerte führt. Insbesondere wird der Eigenwert für das η -Meson wesentlich verbessert. Der Kontaktgraph bietet überdies eine Möglichkeit, die Approximationsgüte der FREDHOLM-Theorie in der Näherung (61) zu prüfen, da für diesen Graphen neben der Näherung (61) auch die exakte Lösung angegeben werden kann. Die Rechnung zeigt, daß man dabei in der Näherung (61) bereits die exakten Eigenwerte erhält. Doch sollen diese Probleme der Näherungsmethode ebenso wie die Spin-1-Mesonen in weiteren Arbeiten untersucht werden.

Herrn Prof. Dr. W. HEISENBERG danken wir auf das Beste für eine kritische Durchsicht und mehrfache Diskussion der Arbeit. Ebenso danken wir Herrn Dr. H. P. DÜRR für das der Problemstellung entgegengebrachte freundliche Interesse.